第5講　点と直線

§1　２点間の距離

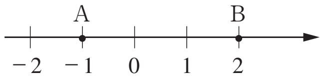
要点整理 と 公式

要点 1　数直線上の２点間の距離

数直線上のある点 P に対応する実数 a を，

点 P の「座標」といい，「P(a)」と表す。

（ex）右図で A(−1)，B(2)

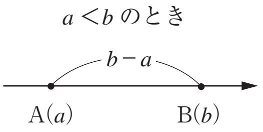


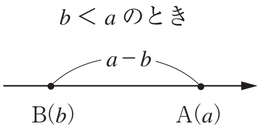
2 点 A(−1)，B(2)間の距離 AB は，AB =　　　　　　　である。

一般に，2 点 A(a)，B (b)の距離 AB は

　　$a < b$ のとき　AB = $b - a$

　　$a > b$ のとき　AB = $a - b$





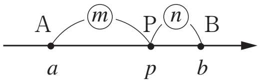
である。これらをまとめると

　　AB =　　　　　　と表される。

要点 2　数直線上の内分点・外分点の座標

数直線上の点 A(a)，B (b)に関して，線分 AB を $m : n$ に内分する点 P(p)を，

線分 AB の「内分点」という。



　　$a < b$ のとき，$a < p < b$ より

　　　AP =　　　，BP =

　　　AP : PB = $m : n$　より

　　　　$(p - a) : (b - p) = m : n$　　　　$m(b - p) = n(p - a)$

　　　　$(m + n)p = na + mb$　　よって　$p = \dfrac{na+mb}{m+n}$

$a > b$ のとき，同様に $p = \dfrac{na+mb}{m+n}$ が導かれる。

とくに $m = n$，つまり $m : n = 1 : 1$ のとき，点 P は線分 AB の「中点」となり，

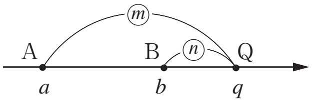
その座標は　$p = \dfrac{1 \cdot a + 1 \cdot b}{1+1} = \dfrac{a+b}{2}$ と表される。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

数直線上の点 A(a)，B(b)に関して，線分 AB を $m:n$ に外分する点Q(q)を，

線分 AB の「外分点」という。

$m > n$ のとき



$m > n$ のときを考える

$a < b$ のとき，$a < b < q$

AQ = 　　　，　BQ =

AQ：QB = $m:n$ より

$(q-a):(q-b) = m:n$　　　$n(q-a) = m(q-b)$

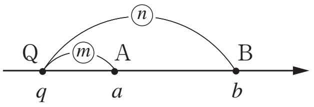
$(m-n)q = mb - na$　　　よって　$q = \dfrac{-na+mb}{m-n}$

$a > b$ のとき，同様に $q = \dfrac{-na+mb}{m-n}$ が導かれる。

また，$m < n$ のときも，$a < b$，$a > b$ に関わらず，

$q = \dfrac{-na+mb}{m-n}$ が導かれる。

$m < n$ のとき

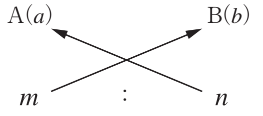


以上より，次のことがいえる。

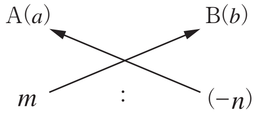
■ 内分点・外分点の座標

数直線上の点 A(a)，B(b)に関して，

・線分 AB を $m:n$ に内分する点の座標は $\dfrac{na+mb}{m+n}$



・線分 AB を $m:n$ に外分する点の座標は $\dfrac{-na+mb}{m-n}$



(ex)　A(3)，B(6)に関して

線分 AB を 2：1 に内分する点P の座標は

線分 AB を 5：2 に外分する点Q の座標は

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

1

A(-3)，B(5)を結ぶ線分 AB について，次の点の座標を求めよ。

(1)　3：2 に内分する点　　(2)　中点

(3)　7：3 に外分する点　　(4)　1：4 に外分する点

Point Pickup

数直線上の２点間の距離，内分点・外分点の座標

数直線上の 2 点 A(a)，B(b)について

2 点 A，B 間の距離は　$\mathrm{AB}=|b-a|$

線分 AB を　$m:n$ に内分する点の座標は $\dfrac{na+mb}{m+n}$

$m:n$ に外分する点の座標は $\dfrac{-na+mb}{m-n}=\dfrac{na-mb}{-m+n}$

外分点の式は，内分点の式の n を $-n$ に，または m を $-m$ におきかえたもの。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ 解答 }

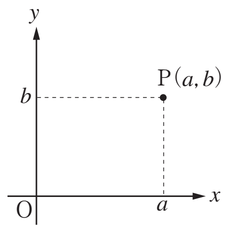
©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

§2 座標平面上の点

要点整理 と 公式

要点3 座標平面と象限

「座標平面」… 座標軸（x 軸，y 軸）で定められた平面



座標平面上の点 P の x 座標が a，y 座標が b のとき，

点 P の「座標」を$(a,\ b)$と表す。

また，座標が$(a,\ b)$である点 P を P$(a,\ b)$ と表す。

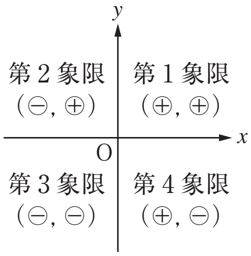
座標平面は，座標軸によって右図のように

「第 1 象限」「第 2 象限」「第 3 象限」「第 4 象限」という

4 つの「象限」に分けられる。

ただし，座標軸はどの象限にも含めない。

各象限ごとの x 座標，y 座標の符号は右図の通り。



要点4 座標平面上の 2 点間の距離

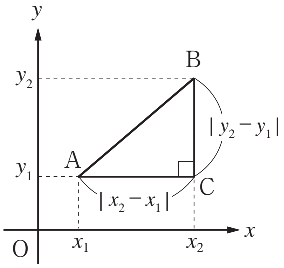
座標平面上の 2 点 A $(x_1,\ y_1)$，B $(x_2,\ y_2)$の距離を求める。

直線 AB が座標軸に平行でないとき，

右図において三平方の定理より　$AB^2 = AC^2 + BC^2$

よって，$AB = \sqrt{AC^2+BC^2} = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

この式は，直線 AB が座標軸のいずれかに平行な場合も成り立つ。



■ 2 点間の距離

2 点 A$(x_1,\ y_1)$，B$(x_2,\ y_2)$の距離は

$$AB = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

特に，原点 O と P $(x,\ y)$の距離は $OP = \sqrt{x^2+y^2}$

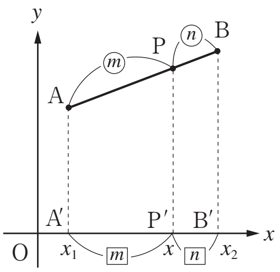
©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

(ex) 2点A(3, 2), B(1, −1)について

$$AB=\sqrt{(1-3)^2+(-1-2)^2}=\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{13}$$

$$OB=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$$

要点5 座標平面上の内分点・外分点



$A(x_1,\ y_1)$, $B(x_2,\ y_2)$ を結ぶ線分ABを $m:n$ に内分する点を

$P(x,\ y)$とする。

A, B, Pから x 軸に垂線AA′, BB′, PP′を下ろすと,

AP：PB = A′P′：P′B′ = $m:n$ である。よって

内分点の公式により $x=\dfrac{nx_1+mx_2}{m+n}$ である。

同様に, y 軸に垂線を下ろして考えると, $y=\dfrac{ny_1+my_2}{m+n}$ である。

外分点についても同様に考えることができる。

よって, 以下のことがいえる。

■ 内分点・外分点の座標

2点 $A(x_1,\ y_1)$, $B(x_2,\ y_2)$ について

線分ABを $m:n$ に内分する点の座標は $\left(\dfrac{nx_1+mx_2}{m+n},\ \dfrac{ny_1+my_2}{m+n}\right)$

線分ABを $m:n$ に外分する点の座標は $\left(\dfrac{-nx_1+mx_2}{m-n},\ \dfrac{-ny_1+my_2}{m-n}\right)$

とくに, 線分ABの中点の座標は $\left(\dfrac{x_1+x_2}{2},\ \dfrac{y_1+y_2}{2}\right)$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2

A(2, −2), B(5, 4), C(−1, 3) について，次のものを求めよ。

(1) 線分 AB の長さ　(2) 線分 AB を 2：1 に内分する点の座標

(3) 線分 AB を1：3 に外分する点の座標　(4) △ABC の重心の座標

Point Pickup

座標平面上の2 点間の距離，内分点・外分点の座標

数直線上の 2 点 A(x_1, y_1)，B(x_2, y_2)について

2 点 A，B 間の距離は　$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

線分 AB を　$m:n$ に内分する点の座標は $\left(\dfrac{nx_1+mx_2}{m+n}, \dfrac{ny_1+my_2}{m+n}\right)$

$m:n$ に外分する点の座標は $\left(\dfrac{-nx_1+mx_2}{m-n}, \dfrac{-ny_1+my_2}{m-n}\right)$

三角形の重心の座標

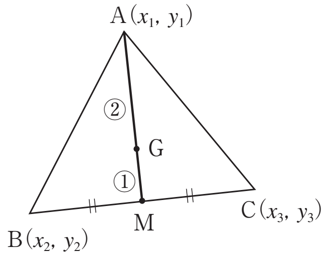
A(x_1, y_1)，B(x_2, y_2)，C(x_3, y_3) について

△ABC の重心 G の座標は $\left(\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3}, \dfrac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$

三角形の重心は，中線(頂点とその対辺の中点を結ぶ線分)を 2：1 に内分する点。

辺 BC の中点を M とすると，M$\left(\dfrac{x_2+x_3}{2}, \dfrac{y_2+y_3}{2}\right)$

△ ABC の重心は，線分 AM を 2：1 に内分する点より



その x 座標は $\dfrac{1\cdot x_1+2\cdot\dfrac{x_2+x_3}{2}}{2+1} = \dfrac{x_1+x_2+x_3}{3}$　　y 座標も同様に求められる。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

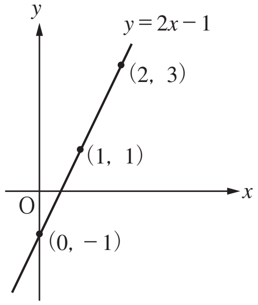
{ 解答 }

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

§3 直線の方程式

要点整理 と 公式

要点6 図形の方程式



1 次関数　$y=2x-1$ のグラフは，傾きが「　　」，
y 軸上の切片(「y 切片」という)が「　　」の直線である。
この直線は，方程式 $y=2x-1$ を満たす点$(x,\ y)$をすべて集めてできる図形である。

このように，x，y の方程式を成り立たせる点$(x,\ y)$全体からできる図形を，「方程式の表す図形」(方程式のグラフ)といい，その方程式を「図形の方程式」という。$y=2x-1$は「直線の方程式」である。

要点7 直線の方程式

点 (1，2) を通り，傾きが 3 の直線の方程式を求める。

傾きが 3 の直線の方程式は　$y=3x+n$　…①　と表される。

①が点(1，2)を通るので，　　$=3\cdot$　　$+n$ …②

①－②より $y-$　　$=3(x-$　　$)$

よって　$y=3(x-1)+2$　つまり　$y=3x-1$

一般に次のことが成り立つ。

■ **直線の方程式①**

点 $(x_1,\ y_1)$を通り，傾きが m の直線の方程式は

$$y-y_1=m(x-x_1)$$

2 点(2，1)，(5，3)を通る直線の方程式を求める。

この直線は，点(2，1) を通り，傾きは　　　　　　であることより

その方程式は　$y-1=\dfrac{2}{3}(x-2)$　つまり　$y=\dfrac{2}{3}x-\dfrac{1}{3}$　である。

一般に次のことが成り立つ。

■ **直線の方程式②**

異なる 2 点 $(x_1,\ y_1)$，$(x_2,\ y_2)$ を通る直線の方程式は

$x_1\neq x_2$のとき　$y-y_1=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$

$x_1=x_2$のとき　$x=x_1$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

一般に，x，y の１次方程式 $ax+by+c=0$ の表す図形は直線であり，
逆に，座標平面上のすべての直線は x，y の１次方程式 $ax+by+c=0$ の形で表される。

（ex）$2x+3y-6=0 \iff y=-\dfrac{2}{3}x+2$　… 傾き $-\dfrac{2}{3}$，y 切片２の直線

$y-2=0 \iff y=2$　…（0，2）を通り，　　軸に平行な直線

$2x+1=0 \iff x=-\dfrac{1}{2}$　… $\left(-\dfrac{1}{2},\ 0\right)$ を通り，　　軸に平行な直線

x，y の１次方程式 $ax+by+c=0$ の表す図形を，単に「直線 $ax+by+c=0$」といい，
この方程式を「直線の方程式」という。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3

次の条件を満たす直線の方程式を求めよ。

(1)　点$(2,\ 1)$を通り，傾きが3

(2)　点$(4,\ 1)$を通り，x軸に平行

(3)　2点$(-1,\ 2)$，$(4,\ -2)$を通る

(4)　2点$(-3,\ 0)$，$(-3,\ 5)$を通る

Point Pickup

直線の方程式

点$(x_1,\ y_1)$を通り，傾きがmの直線

$$y-y_1=m(x-x_1) \iff y=m(x-x_1)+y_1$$

異なる2点$(x_1,\ y_1)$，$(x_2,\ y_2)$を通る直線

$x_1 \neq x_2$ のとき　$y-y_1=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1) \iff y=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)+y_1$

$x_1=x_2$ のとき　$x=x_1$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ 解答 }

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

§4 ▶ 2 直線の関係，点と直線の距離

要点整理 と 公式

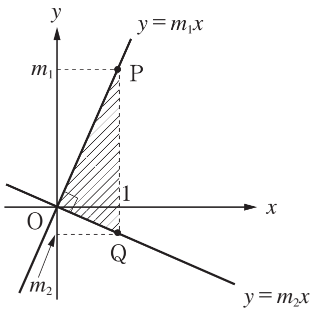
要点 8　2 直線の平行と垂直

2 直線が平行ならばその傾きは等しく，逆に傾きが等しければその2 直線は平行である。

ここでは，2 直線が垂直になるときを考える。

2 直線の方程式を $l : y = m_1x + n_1$，$m : y = m_2x + n_2$ とする。

l と m が垂直になるのは，それぞれの直線に平行で原点 O を通る直線 $y = m_1x$ と $y = m_2x$ が垂直になるときである。



$y = m_1x$ と $y = m_2x$ の上にそれぞれ P $(1,\ m_1)$，Q $(1,\ m_2)$をとる。

三平方の定理により $PQ^2 = OP^2 + OQ^2$

$(m_1 - m_2)^2 = (1 + m_1^2) + (1 + m_2^2)$　　　よって $m_1m_2 = -1$

したがって，2 直線 l，m が垂直ならば，$m_1m_2 = -1$　が成り立つ。

逆に $m_1m_2 = -1$ ならば，2 直線は垂直である。

一般に，次のことが成り立つ。

■ 2直線の平行と垂直

2 直線 $y = m_1x + n_1$，$y = m_2x + n_2$ において

2 直線が平行　$\Longleftrightarrow$　$m_1 = m_2$

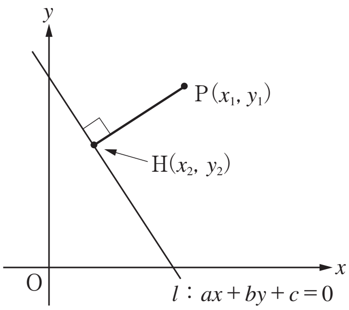
2 直線が垂直　$\Longleftrightarrow$　$m_1m_2 = -1$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

要点9 点と直線の距離

P $(x_1,\ y_1)$ から方程式 $ax+by+c=0$ で表される直線 l に下ろした垂線 PH の長さを求める。

H $(x_2,\ y_2)$ とすると，$PH^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2$ …①



$a\neq0$ かつ $b\neq0$ のとき

l の傾きは $-\dfrac{a}{b}$ であるから，PH の傾きは $\dfrac{b}{a}$ である。

よって $\dfrac{b}{a}=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$　　$\dfrac{x_2-x_1}{a}=\dfrac{y_2-y_1}{b}$

したがって $\begin{cases} x_2-x_1=at \\ y_2-y_1=bt \end{cases}$ …②（t は実数）とおける。

また，点 H は $ax+by+c=0$ 上にあるので $ax_2+by_2+c=0$

これと②より

$$a(x_1+at)+b(y_1+bt)+c=0$$

$$(a^2+b^2)t=-ax_1-by_1-c \qquad \text{よって}\quad t=-\frac{ax_1+by_1+c}{a^2+b^2}\ \cdots③$$

①，②，③より

$$PH^2=(at)^2+(bt)^2=(a^2+b^2)t^2$$

$$=(a^2+b^2)\cdot\frac{(ax_1+by_1+c)^2}{(a^2+b^2)^2}=\frac{(ax_1+by_1+c)^2}{a^2+b^2}$$

したがって　$PH=\dfrac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

これは a，b いずれか一方が 0 のときも成り立つ。

以上より，次のことが成り立つ。

■ 点と直線の距離

P $(x_1,\ y_1)$ と直線 $ax+by+c=0$ の距離 d は

$$d=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

4

［1］ 点$(5,\ 2)$を通り，直線 $x+3y+1=0$ に平行な直線，垂直な直線の方程式をそれぞれ求めよ。

［2］ 次の点と直線の距離を求めよ。

(1) 原点と直線 $3x+4y+5=0$　　(2) $(1,\ -3)$と直線 $x-2y-13=0$

Point Pickup

２直線の平行・垂直

2 直線が平行 $\Longleftrightarrow$ 傾きが等しい

2 直線が垂直 $\Longleftrightarrow$ 傾きの積が -1

点と直線の距離

点 $(x_1,\ y_1)$ と直線 $ax+by+c=0$ の距離 d は　$d=\dfrac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

・直線の式の形を $ax+by+c=0$（一般形）の形にする。

・分母は直線の x，y の係数を用いる。

　また，分子は直線の式に点の座標を代入したもの。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ 解答 }

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第5講　確認テスト

1　2点 A(1，−3)，B(4，3) について，線分 AB を 1：2 に内分する点の座標は
(ア ， イウ)，4：1 に外分する点の座標は (エ ， オ) である。

2　2点(6，−3)，(−4，3)を通る直線の傾きは $-\dfrac{\text{カ}}{\text{キ}}$ である。よって，この直線の方程式は

$y=-\dfrac{\text{カ}}{\text{キ}}x+\dfrac{\text{ク}}{\text{ケ}}$ である。

3　点(2，−3)を通り，直線 $4x-3y+1=0$ に平行な直線の傾きは $\dfrac{\text{コ}}{\text{サ}}$ である。

また，垂直な直線の方程式は $y=-\dfrac{\text{シ}}{\text{ス}}x-\dfrac{\text{セ}}{\text{ソ}}$ である。

4　点(5，−2)と直線 $3x-2y-6=0$ の距離は $\sqrt{\text{タチ}}$ である。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ Note }

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第5講　点と直線

1

(1) $\dfrac{2\cdot(-3)+3\cdot5}{3+2}=\dfrac{9}{5}$

(2) $\dfrac{1\cdot(-3)+1\cdot5}{1+1}=\dfrac{-3+5}{2}=1$

(3) $\dfrac{(-3)\cdot(-3)+7\cdot5}{7-3}=11$

(4) $\dfrac{4\cdot(-3)+(-1)\cdot5}{-1+4}=-\dfrac{17}{3}$

2

(1) $\mathrm{AB}=\sqrt{(5-2)^2+\{4-(-2)\}^2}=\sqrt{3^2+6^2}=\sqrt{45}=3\sqrt{5}$

(2) $\left(\dfrac{1\cdot2+2\cdot5}{2+1},\ \dfrac{1\cdot(-2)+2\cdot4}{2+1}\right)=(4,\ 2)$

(3) $\left(\dfrac{3\cdot2+(-1)\cdot5}{-1+3},\ \dfrac{3\cdot(-2)+(-1)\cdot4}{-1+3}\right)=\left(\dfrac{1}{2},\ -5\right)$

(4) $\left(\dfrac{2+5-1}{3},\ \dfrac{-2+4+3}{3}\right)=\left(2,\ \dfrac{5}{3}\right)$

3

(1) $y-1=3(x-2)$　　$y=3(x-2)+1$　　よって　$y=3x-5$

(2) 傾きが0より　$y-1=0\cdot(x-4)$　　よって　$y=1$

(3) $y-2=\dfrac{-2-2}{4-(-1)}\{x-(-1)\}$

$y=\dfrac{-2-2}{4-(-1)}\{x-(-1)\}+2$

$y=-\dfrac{4}{5}(x+1)+2$　よって　$y=-\dfrac{4}{5}x+\dfrac{6}{5}$

(4) $x=-3$

4

［1］ 直線　$x+3y+1=0$　の傾きは $-\dfrac{1}{3}$

よって，この直線と平行な直線の方程式は $y=-\dfrac{1}{3}(x-5)+2$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

よって　$y=-\dfrac{1}{3}x+\dfrac{11}{3}$

また，垂直な直線の方程式は　$y=3(x-5)+2$

よって　$y=3x-13$

［2］（1）$\dfrac{|3\cdot0+4\cdot0+5|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\dfrac{|5|}{\sqrt{25}}=\dfrac{5}{5}=1$

（2）$\dfrac{|1\cdot1+(-2)\cdot(-3)-13|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\dfrac{|-6|}{\sqrt{5}}=\dfrac{6}{\sqrt{5}}=\dfrac{6\sqrt{5}}{5}$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第5講　確認テスト

1　2点 A(1, −3)，B(4, 3) について，線分 AB を 1：2 に内分する点の座標は

(ア , イウ)，4：1 に外分する点の座標は (エ , オ) である。

2　2点(6, −3)，(−4, 3)を通る直線の傾きは $-\dfrac{\boxed{カ}}{\boxed{キ}}$ である。よって，この直線の方程式は

$y=-\dfrac{\boxed{カ}}{\boxed{キ}}x+\dfrac{\boxed{ク}}{\boxed{ケ}}$ である。

3　点(2, −3)を通り，直線 $4x-3y+1=0$ に平行な直線の傾きは $\dfrac{\boxed{コ}}{\boxed{サ}}$ である。

また，垂直な直線の方程式は $y=-\dfrac{\boxed{シ}}{\boxed{ス}}x-\dfrac{\boxed{セ}}{\boxed{ソ}}$ である。

4　点(5, −2)と直線 $3x-2y-6=0$ の距離は $\sqrt{\boxed{タチ}}$ である。

{ 解答 }

1	ア　2	イ　−	ウ　1	エ　5	オ　5	
2	カ　3	キ　5	ク　3	ケ　5		
3	コ　4	サ　3	シ　3	ス　4	セ　3	ソ　2
4	タ　1	チ　3				

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。